

Signaux et Systèmes

Chapitre 5

Filtrage et échantillonnage

Septembre 2019

TABLE DES MATIERES

5.1 Réponse fréquentielle

- Réponse à des entrées sinusoïdale, périodique, apériodique

5.2 Filtres idéaux

- Filtre passe-bas idéal
- Canal de Nyquist

5.3 Echantillonnage de signaux

- Echantillonnage et répétition spectrale
- Dualité avec les séries de Fourier
- Théorème d'échantillonnage (Shannon)
- Reconstruction du signal analogique

5.1 REPONSE FREQUENTIELLE

- Réponse fréquentielle d'un système
- Réponse à une excitation sinusoïdale
- Réponse à une excitation périodique

Réponse fréquentielle d'un système LIT

- Système linéaire invariant dans le temps = filtrage temporel

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t - \tau) d\tau \longleftrightarrow X(\omega)H(\omega)$$
$$x(t) \rightarrow [S_a] \rightarrow h(t) \quad y(t) = (h * x)(t)$$

- Réponse impulsionnelle

- $h(t) = S_a\{\delta\}(t)$
- Condition de stabilité BIBO: $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < +\infty \Leftrightarrow h \in L_1$

- Réponse fréquentielle

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt = \mathcal{F}\{h\}(\omega) \quad (\text{bien définie, car } h \in L_1)$$

Deux représentations :

- Parties réelle et imaginaire: $H(\omega) = R_H(\omega) + jI_H(\omega)$
- Réponse d'amplitude et de phase: $H(\omega) = A_H(\omega) \cdot e^{j\Phi_H(\omega)}$

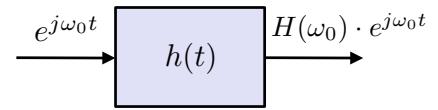
Réponse à une excitation sinusoïdale

■ Réponse à une excitation sinusoïdale complexe

$$x_c(t) = e^{j\omega_0 t}$$

Réponse fréquentielle

$$y_c(t) = (h * x_c)(t) = H(\omega_0) \cdot e^{j\omega_0 t} = H(\omega_0) \cdot x_c(t)$$



Calcul temporel (rappel)

$$y_c(t) = (h * x_c)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot e^{j\omega_0(t-\tau)} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-j\omega_0\tau} d\tau e^{j\omega_0 t} = H(\omega_0) \cdot e^{j\omega_0 t}$$

Calcul par transformation de Fourier

$$e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

$$y_c(t) \leftrightarrow X_c(\omega) \cdot H(\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \cdot H(\omega) = H(\omega_0) \cdot 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

■ Réponse à une excitation sinusoïdale réelle

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \theta) = \operatorname{Re}(A e^{j\theta} e^{j\omega_0 t})$$

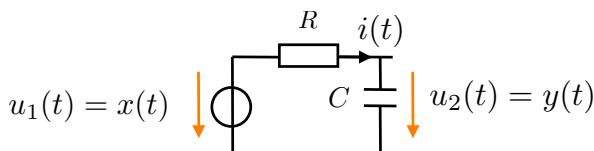
Réponse d'amplitude

$$y(t) = \operatorname{Re}(A e^{j\theta} y_c(t)) = \operatorname{Re}(A e^{j\theta} H(\omega_0) e^{j\omega_0 t}) = A \cdot A_H(\omega_0) \cdot \cos(\omega_0 t + \theta + \Phi_H(\omega_0))$$

Réponse de phase

Conclusion: La réponse à une excitation sinusoïdale est une sinusoïde de même fréquence avec un facteur d'atténuation et un déphasage spécifiés par la réponse fréquentielle (amplitude et phase) du système LIT.

Exemple: filtre RC



Equation différentielle:

$$\frac{d}{dt}y(t) + s_0 y(t) = s_0 x(t), \quad s_0 = \frac{1}{RC}$$

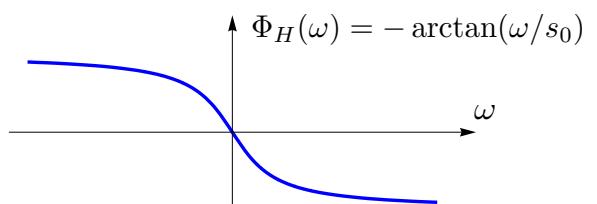
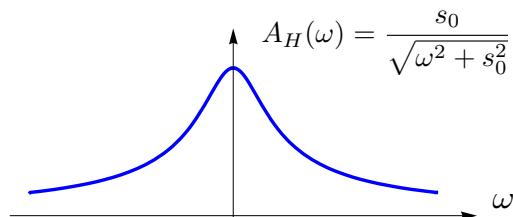
$$H(\omega) = \frac{s_0}{j\omega + s_0}$$

Recherche explicite de la réponse à une excitation sinusoïdale
(méthode des phaseurs):

$$x(t) = e^{j\omega_0 t}$$

$$y(t) = H(\omega_0) e^{j\omega_0 t} \Rightarrow y'(t) + s_0 y(t) = (j\omega_0 + s_0) H(\omega_0) e^{j\omega_0 t}$$

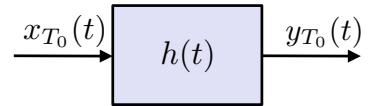
$$(j\omega_0 + s_0) H(\omega_0) e^{j\omega_0 t} = s_0 e^{j\omega_0 t} \Rightarrow H(\omega_0) = \frac{s_0}{j\omega_0 + s_0}$$



Réponse à une excitation périodique

- Signal d'excitation périodique

$$x_{T_0}(t) = x_{T_0}(t + kT_0), \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$



Série de Fourier: $x_{T_0}(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{jn\omega_0 t}, \quad c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x_{T_0}(t) e^{-jn\omega_0 t} dt, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

- Réponse du système à une excitation périodique

$$y_{T_0}(t) = (h * x_{T_0})(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \cdot H(n\omega_0) \cdot e^{jn\omega_0 t} \quad (\text{par linéarité})$$

Périodicité de la réponse (argument temporel):

$$y(t + kT_0) = (h * x_{T_0}(\cdot + kT_0))(t) = (h * x_{T_0})(t) = y(t)$$

Calcul par transformation de Fourier

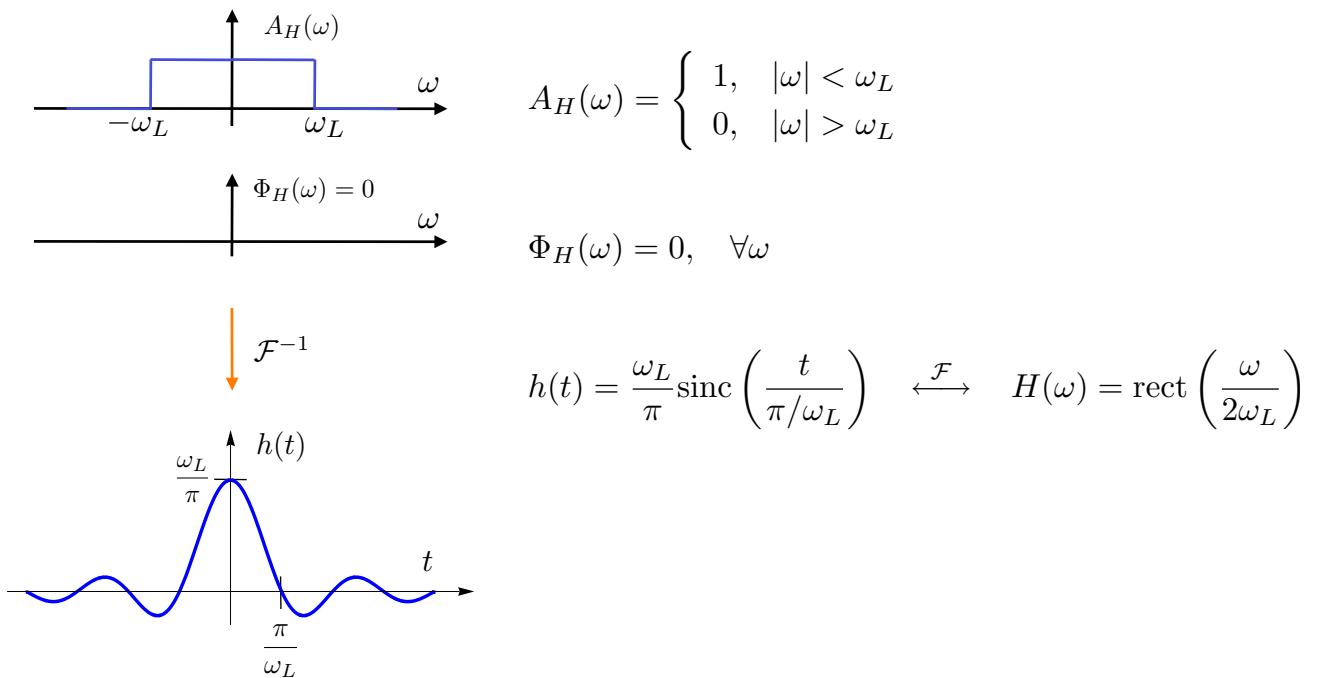
$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{jn\omega_0 t} &\leftrightarrow 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \delta(\omega - n\omega_0) \\ y_{T_0}(t) &\leftrightarrow X_{T_0}(\omega) \cdot H(\omega) = H(\omega) \cdot \left(2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \delta(\omega - n\omega_0) \right) = 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} H(n\omega_0) \cdot c_n \delta(\omega - n\omega_0) \end{aligned}$$

Conclusion: La réponse d'un système LIT à une excitation périodique est forcément périodique

5.2 FILTRES IDEAUX

- Filtre passe-bas idéal
- Canal de Nyquist idéal
- Canal de Nyquist non-idéal
- Filtre passe-bande idéal

Filtre passe-bas idéal



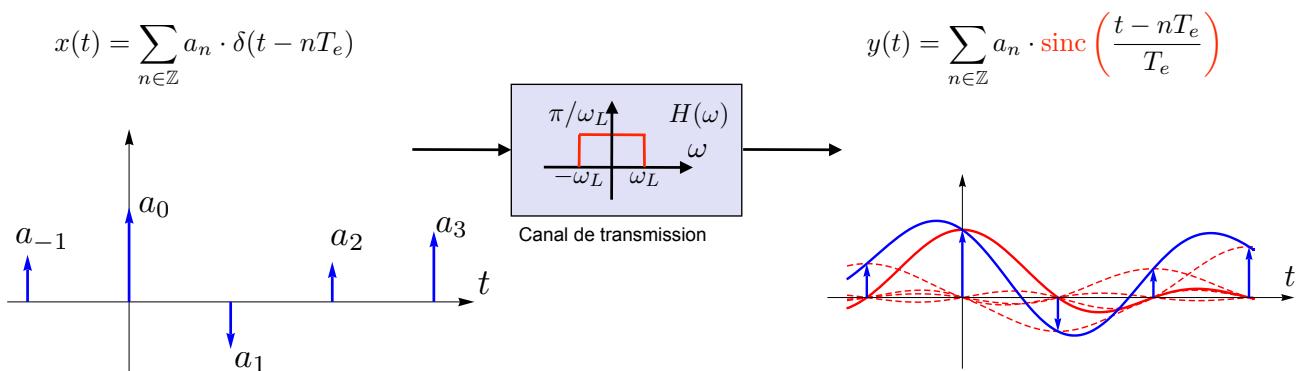
N.B. Le filtre passe-bas idéal n'est pas causal—donc pas réalisable!

Toutefois, c'est un outil très utile pour comprendre et analyser les systèmes.

Canal de Nyquist idéal

Un filtre passe-bas idéal présente les caractéristiques idéales d'un canal de transmission pour des impulsions de Dirac pondérées, si elles sont introduites dans le canal avec une distance $T_e = \pi/\omega_L$ (=1^{er} zéro du sinc) (Canal de Nyquist idéal)

Capacité du canal: $\frac{\omega_L}{\pi} = 2f_L = \frac{1}{T_e} \left[\frac{\text{Digits}}{\text{sec}} \right]$



$$\text{sinc}\left(\frac{nT_e}{T_e}\right) = \delta_n \Rightarrow y(nT_e) = a_n$$

Canal de Nyquist non-ideal

■ Signal transmis

$$x(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n h_1(t - nT_e)$$

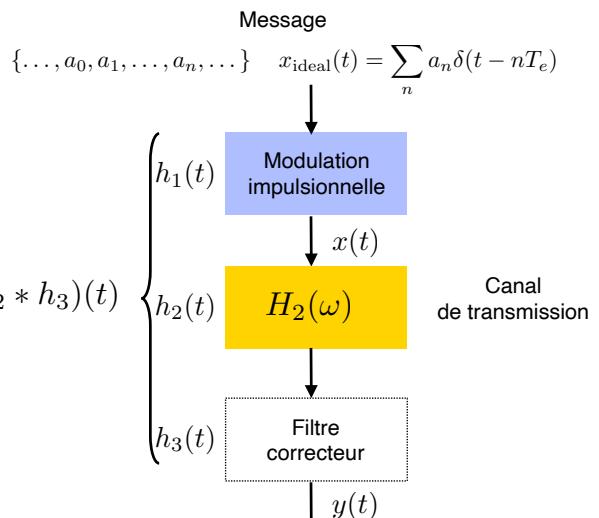
■ Signal reçu

$$y(t) = \sum_n a_n h(t - nT_e)$$

$$h(t) = (h_1 * h_2 * h_3)(t)$$

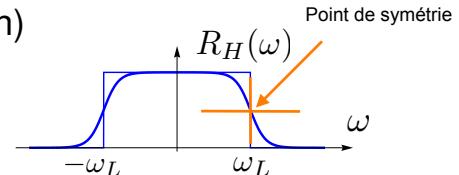
■ Critère de transmission parfaite

$$y(nT_e) = a_n \Leftrightarrow h(nT_e) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$



■ Condition de Nyquist généralisée (interpolation)

$$h(nT_e) = \delta_n \quad \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \quad \frac{1}{T_e} \sum_{n \in \mathbb{Z}} H\left(\omega + \frac{2\pi}{T_e}n\right) = 1$$



(cf. exercice)

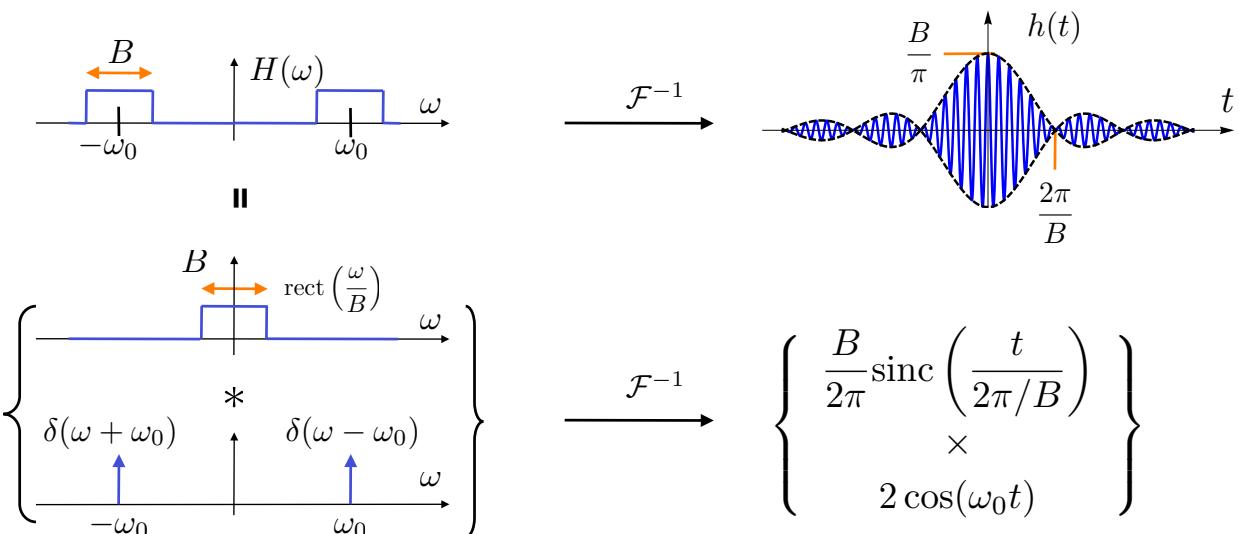
Filtre passe-bande idéal

■ Réponse fréquentielle:

$$H(\omega) = \text{rect}\left(\frac{\omega + \omega_0}{B}\right) + \text{rect}\left(\frac{\omega - \omega_0}{B}\right)$$

ω_0 : fréquence centrale

B : bande passante



5.3 ECHANTILLONNAGE DE SIGNAUX

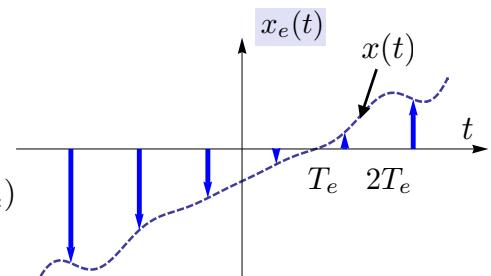
- Signal échantillonné analogique
- Echantillonnage et répétition spectrale
- Dualité avec les séries de Fourier
- Formule de Poisson
- Théorème d'échantillonnage (Shannon)
- Reconstruction d'un signal analogique
- Généralisation du théorème d'échantillonnage

Signal analogique échantillonné

- Echantillonnage idéal

Multiplication avec un peigne de Dirac

$$x_e(t) = x(t) \times \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(t - nT_e) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(nT_e) \delta(t - nT_e)$$

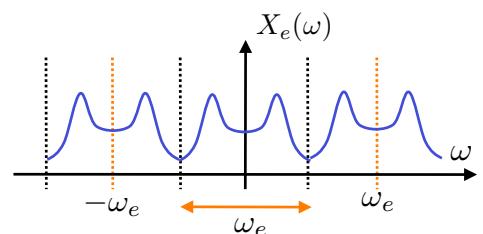


- Calcul de la transformation de Fourier

$$\begin{aligned} X_e(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(nT_e) \delta(t - nT_e) e^{-j\omega t} dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(nT_e) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e) e^{-j\omega t} dt \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(nT_e) e^{-j\omega nT_e} \end{aligned}$$

- Caractéristiques de $X_e(\omega)$

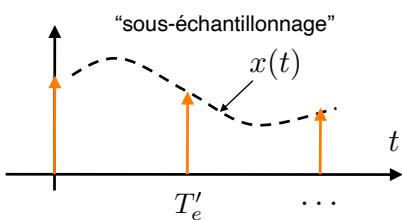
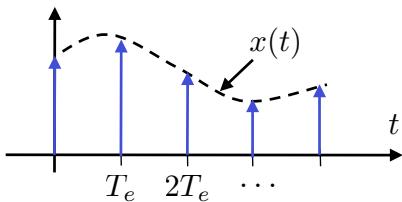
- Fonction périodique (somme d'harmoniques)
- Période: $\omega_e = \frac{2\pi}{T_e}$ (t.q., $\omega_e T_e = 2\pi$)
- Forme: dépend des échantillons $x(nT_e)$ de $x(t)$



Echantillonnage et répétition spectrale

■ Signal échantillonné

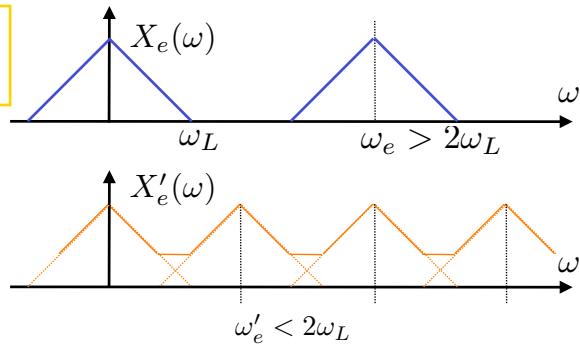
$$x_e(t) = x(t) \times \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(t - kT_e) \quad \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \quad X_e(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left(X * \frac{2\pi}{T_e} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta\left(\cdot - n \frac{2\pi}{T_e}\right) \right) (\omega)$$



$$X_e(\omega) = \frac{1}{T_e} \sum_{n \in \mathbb{Z}} X\left(\omega - n \frac{2\pi}{T_e}\right)$$



$$\omega_e = \frac{2\pi}{T_e}$$



$$\omega'_e < 2\omega_L$$

Formule de Poisson

■ Peigne de Dirac

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(t + k) \quad \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \quad 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(\omega + n2\pi)$$

■ Formule de Poisson

Justification:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} F(2\pi n)$$

$$\begin{aligned} \forall f \in \mathcal{S}, \langle f, \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(\cdot + k) \rangle &= \frac{1}{2\pi} \langle F, 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(\cdot + n2\pi) \rangle \quad (\text{Parseval}) \\ \Rightarrow \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} F(2\pi n) \end{aligned}$$

Valide également pour $f, F \in L_1$

■ Formule de Poisson et échantillonnage

$$f(t) = x(t)e^{-j\omega_0 t} \quad \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \quad F(\omega) = X(\omega + \omega_0) \quad (\text{modulation})$$

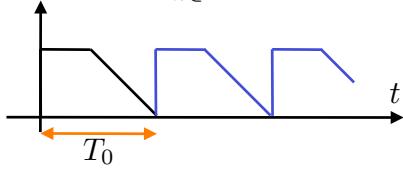
$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x(k)e^{-j\omega_0 k} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} F(2\pi n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} X(2\pi n + \omega_0)$$

$$\Rightarrow X_e(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x(k)e^{-jk\omega} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} X(\omega + 2\pi n)$$

Dualité avec les séries de Fourier

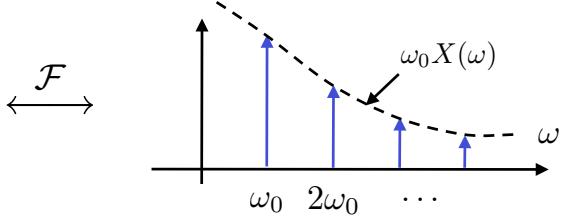
■ Périodisation dans le temps

$$x_{T_0}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x(t - kT_0)$$



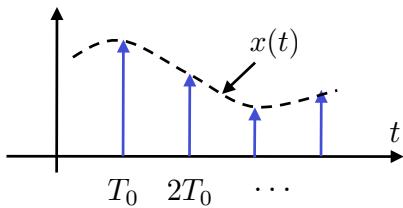
$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$X_{T_0}(\omega) = \omega_0 \sum_{n \in \mathbb{Z}} X(n\omega_0) \delta(\omega - n\omega_0)$$

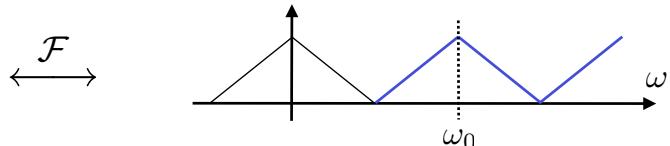


■ Echantillonnage dans le temps

$$x_e(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x(kT_0) \delta(t - kT_0)$$



$$X_e(\omega) = \frac{\omega_0}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} X(\omega - n\omega_0)$$



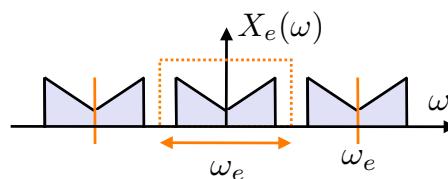
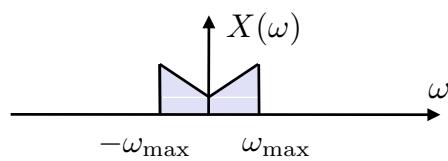
Théorème d'échantillonnage

Théorème [Shannon, 1949]

Une fonction $x(t)$ (à bande limitée) qui ne contient pas de fréquences supérieures à $\omega_{\max} = 2\pi f_{\max}$ est complètement déterminée par ses échantillons $\{x(kT_e)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ pour autant que:

$$T_e = \frac{2\pi}{\omega_e} \leq \frac{1}{2f_{\max}}$$

ou $\omega_e \geq 2\omega_{\max}$

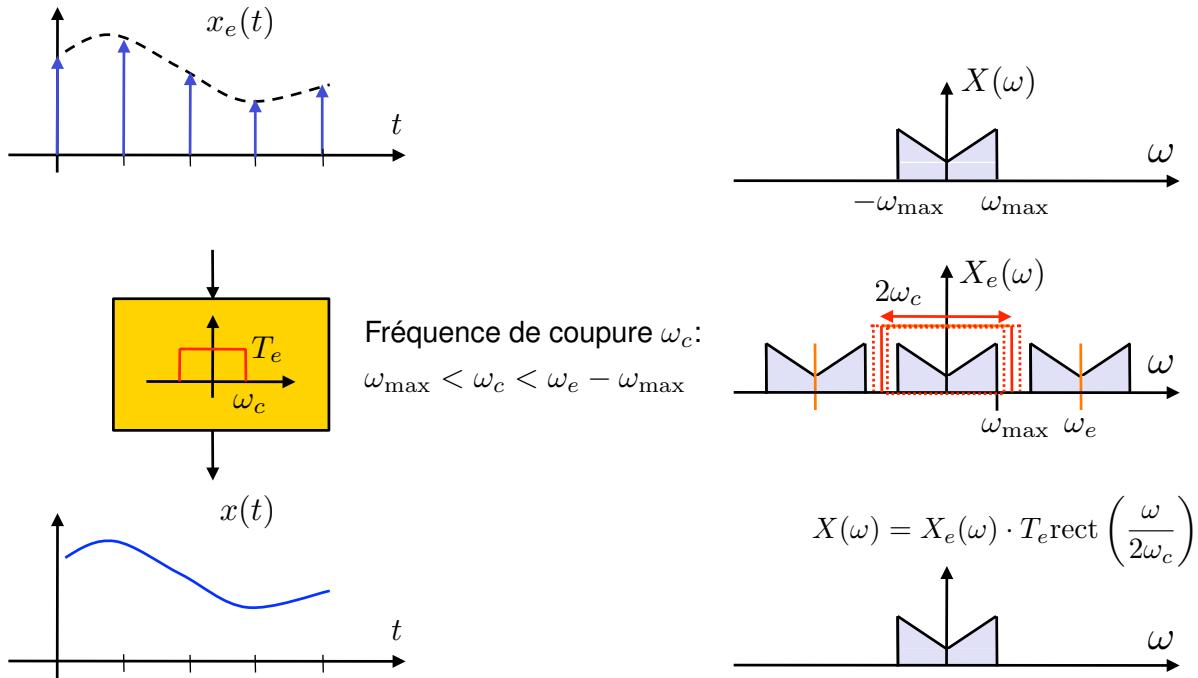


N.B. En pratique, le signal $x(t)$ doit être filtré avant l'échantillonnage avec un filtre passe-bas analogique (filtre de garde ou «anti-aliasing») de façon que sa largeur de bande soit bien limitée.



Reconstruction du signal analogique

■ Reconstruction par filtrage passe-bas idéal



Formule de reconstruction de Shannon

■ Reconstruction par filtrage idéal

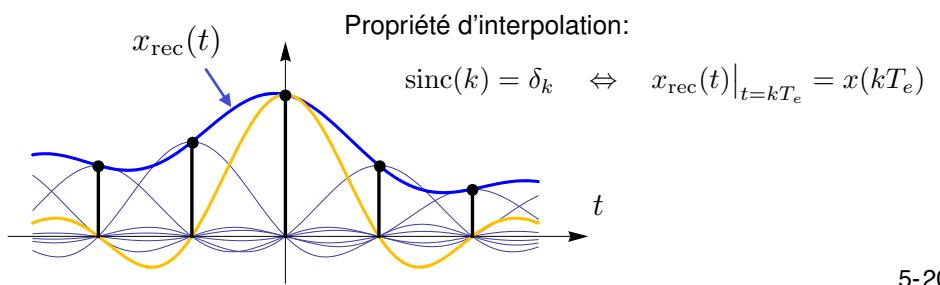
$$x_e(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x(kT_e) \delta(t - kT_e)$$

$\xrightarrow{\quad \delta(t) \quad}$
 $x(t) = ?$

$$\text{sinc}\left(\frac{t}{T_e}\right) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ T_e \text{rect}\left(\frac{\cdot}{2\pi/T_e}\right) \right\}(t)$$

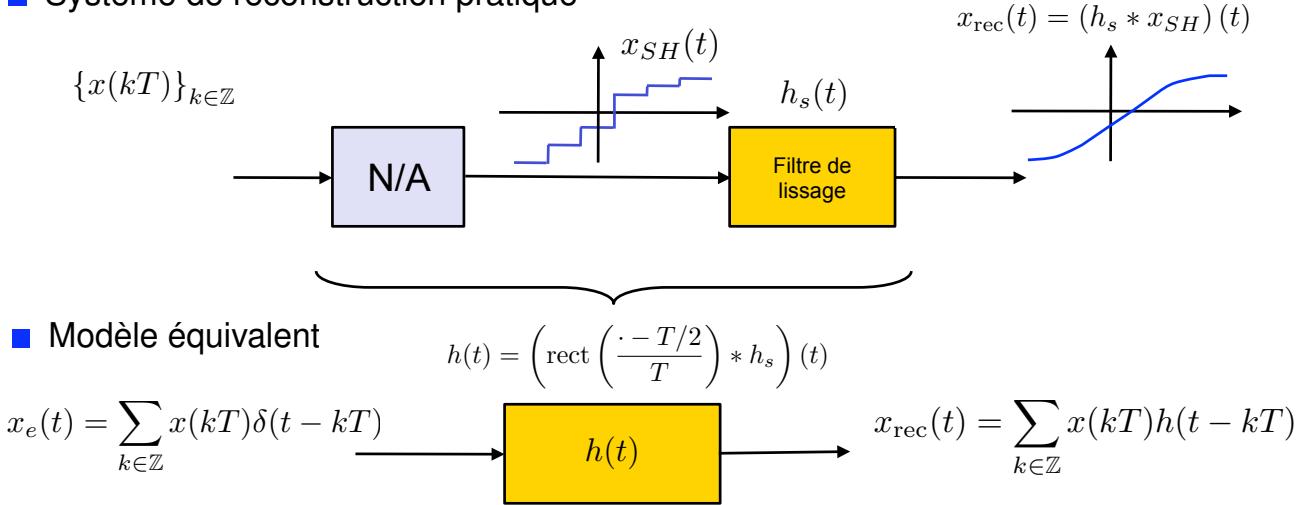
■ Formule de reconstruction (signal à bande limitée)

$$x(t) = \left(x_e * \text{sinc}\left(\frac{\cdot}{T_e}\right) \right)(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x(kT_e) \text{sinc}\left(\frac{t - kT_e}{T_e}\right) \quad \omega_{\max} < \omega_e/2$$



Convertisseur N/A réel

■ Système de reconstruction pratique



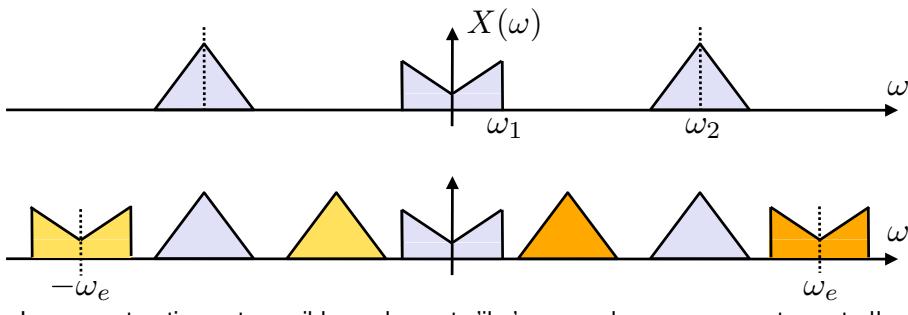
■ Critères de design pour le filtre de lissage

■ Bonne approximation du filtre idéal: $|H_s(\omega)| \approx \frac{1}{\text{sinc}(\omega T/(2\pi))}$ pour $\omega \in [-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}]$

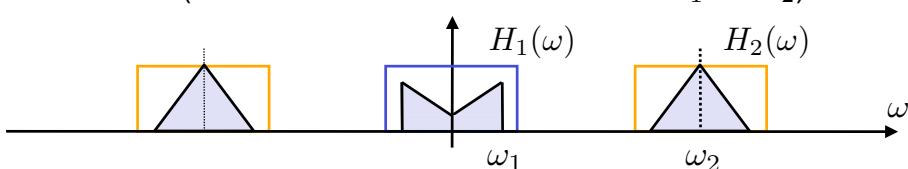
■ Interpolation: $x_{rec}(kT) = x(kT) \Leftrightarrow h(kT) = \delta_k \Leftrightarrow \frac{1}{T} \sum_{n \in \mathbb{Z}} H\left(\omega + \frac{2\pi n}{T}\right) = 1$

Généralisation du théorème de Shannon

■ Exemple: signal dont le spectre est contenu dans des bandes



■ Reconstruction (filtres idéaux de reconstruction H_1 et H_2)



$$x(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x(kT_e) h_1(t - kT_e) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} x(kT_e) h_2(t - kT_e)$$